

二周波降水レーダアルゴリズムの基礎方程式と その解法に関する研究

CHARACTERISTICS AND SOLVING METHODS OF A SET OF EQUATIONS
AS A PRIMITIVE DUAL-FREQUENCY PRECIPITATION RADAR ALGORITHM

瀬戸心太¹・井口俊夫²・沖大幹¹
Shinta SETO, Toshio IGUCHI, and Taikan OKI

¹正会員 博士(工学) 東京大学生産技術研究所 (〒153-8505 東京都目黒区駒場4-6-1)

²非会員 Ph.D (独)情報通信研究機構 (〒184-8795 東京都小金井市貫井北町4-2-1)

This study investigates characteristics and solving methods of a set of primitive equations for dual-frequency precipitation radar algorithms. There are some previously proposed solving methods such as forward method, backward method, and recursion method, but none of them can always give the right answer. The set of primitive equations for multiple ranges can be decomposed into lemmas for one range, which are deeply examined in this study. A lemma composing the backward method usually has a unique solution, while a lemma composing the forward method usually has multiple solutions. This implies that the backward method is a relatively stable method, but this method requires accurate surface reference estimates. We need to develop some criteria to select one solution from multiple solutions. For that, we conduct a preliminary study by using the TRMM/PR standard product. Moreover, the deficiency of the recursion method is explained with a definition of stability of solutions.

Key Words : dual-frequency precipitation radar(DPR), drop size distribution, GPM, TRMM, PR

1. はじめに

世界初の衛星搭載二周波降水レーダ(DPR)は全球降水観測(GPM)計画の主衛星に搭載され2013年に運用を開始する予定である。DPRは、KuPRおよびKaPRと呼ばれる2つのレーダから構成される。KuPRは、1997年から現在まで運用されている熱帯降雨観測衛星(TRMM)搭載の降雨レーダ(PR)と似た構成であり、Ku帯のマイクロ波である周波数13.6GHzを用いる。一方、KaPRは、Ka帯のマイクロ波である35.5GHzを用いる。DPRのPRに対する長所は、大きく分けて2つあるとされている。1つは、より感度の高いKaPRにより、弱い雨および固体降水の観測が可能になることである。もう1つは、KuPRとKaPRの同時観測により、粒径分布の推定がより正確に行えることである。

DPRは観測頻度が数日に1回程度と低いため、単独では実利用に応用できる範囲は限られる。しかし、観測頻度の高いマイクロ波放射計などの他のセンサの降水強度推定アルゴリズムの開発・検証にDPRを用いることで、他のセンサによる降水推定精度を向上させ、現在よりさらに高精度な高解像度全球降水マップ(HRPP)の開発に

寄与することが期待できる。HRPPは、現在も世界の複数のグループで開発が進められており、水工学分野への応用も既にいくつか検討されている¹⁾。DPR単独での降水強度推定精度を高めることが、近い将来のHRPPの精度をさらに向上し、広く実用されるためにも重要である。

二周波レーダの観測から降水強度を推定するアルゴリズムの開発は、古くは1970年代から行われている²⁾。TRMMの計画段階において一時期、レーダを二周波とすることも検討された。Meneghini et al.³⁾(以下M92)は、降水の粒径分布をガンマ分布と仮定して2つのパラメータ(N_0, D_0)で表し、二周波の観測レーダ反射因子 Z_m をMie散乱理論により計算した。初期の多くの研究²⁾は、Mie散乱の効果を無視するRayleigh近似を行う、あるいは降水強度が鉛直方向に変化しないといった仮定をおいており、対象となる降水の種類が限定されていたが、M92の定式化には、そうした制約がない。本研究では、この定式化により得られる「基礎方程式」の特性と解法について、既往の研究を踏まえた考察を行う。

以下本論文では、2節で基礎方程式の定式化、3節で既往の研究における基礎方程式の解法を紹介した後、4節以降で基礎方程式の特性と解法について検討する。

2. 基礎方程式

(1) レーダ観測の定式化

M92に習い、レーダ観測の定式化を行う。降水の粒径分布関数 $N(D)[\text{mm}^{-1}\text{m}^{-3}]$ としてガンマ分布を仮定する。

$$N(D) = N_0 D^\mu \exp[-(3.67 + \mu)D / D_0] \quad (1)$$

ここに、 D は粒径[mm]、 $N_0[\text{mm}^{-1}\text{m}^{-3}] \cdot D_0[\text{mm}] \cdot \mu[-]$ はガンマ分布のパラメータである。減衰の影響を考慮しない場合のレーダ反射因子 $Z_e[\text{mm}^6\text{m}^{-3}]$ は、式(2)のように表される。

$$Z_e = C_z \int_{D=0}^{\infty} \sigma_b(D) N(D) dD \quad (2)$$

ここに、 C_z は、レーダの波長 $\lambda[\text{mm}]$ 、降水粒子の複素屈折率 n (温度 $T[\text{K}]$)に依存から式(3)のように与えられる。

$$C_z = \frac{\lambda^4}{\pi^5} \left| \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \right|^2 \quad (3)$$

σ_b は後方散乱断面積 $[\text{mm}^2]$ であり、Mie散乱係数 a_l, b_l を用いて、式(4)のように求められる。

$$\sigma_b = \frac{\lambda^2}{4\pi} \left| \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l (2l+1)(a_l - b_l) \right|^2 \quad (4)$$

図-1に示すように、レーダ位置を0として観測方向に測った距離を $r[\text{km}]$ とする。位置 r における観測レーダ反射因子 $Z_m(r)$ は、式(5)により表される。

$$dBZ_m(r) = dBZ_e(r) - 2 \int_{s=0}^r k(s) ds \quad (5)$$

ただし $dBZ = 10 \times \log_{10} Z$ を表す。 s は r のダミー変数である。 k は減衰係数 $[\text{dB km}^{-1}]$ であり、式(6)で求められる。

$$k = C_k \int_{D=0}^{\infty} \sigma_t(D) N(D) dD \quad (6)$$

ここで、 $C_k = 0.01 \times \log_{10} e$ であり、 σ_t は消散断面積 $[\text{mm}^2]$ であり、(7)で表現される。

$$\sigma_t = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \text{Re}(a_l + b_l) \quad (7)$$

ただし、 $\text{Re}(X)$ は複素数 X の実部を表す。ところで、降水強度 $R[\text{mm h}^{-1}]$ は、次のように表現できる。

$$R = C_R \int_{D=0}^{\infty} v(D) D^3 N(D) dD \quad (8)$$

ただし、 $v(D)$ は粒子の落下速度 $[\text{m s}^{-1}]$ 、 $C_R = 0.6 \pi \times 10^3$ である。すなわち、 N_0 および D_0 を求めることは、 R を求めることと同等である。

(2) DPRへの適用

図-1に示すように、DPRにより幅 $L[\text{km}]$ の M 個のレンジで観測する場合を考える。1つのレンジ内での N_0 および D_0 は一樣であり、 n および μ は既知の定数として扱う。このとき、あるレンジの dBZ_e および k はそのレンジの N_0 と D_0 のみの関数となり、式(9)および(10)で表される。

$$dBZ_e = 10 \log_{10} N_0 + F(D_0) \quad (9)$$

$$k = N_0 \times G(D_0) \quad (10)$$

ただし、 F, G は以下の関数を簡略化したものである。

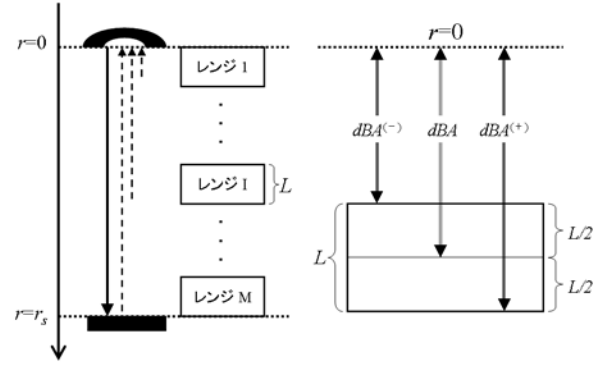


図-1 レーダ観測とその離散化の概念図(左)および減衰の定義の説明(右)。

$$F(D_0) = 10 \log_{10} \left\{ C_z \int_{D=0}^{\infty} \sigma_b(D) D^\mu \exp[-(3.67 + \mu)D / D_0] dD \right\} \quad (11)$$

$$G(D_0) = C_k \int_{D=0}^{\infty} \sigma_t(D) D^\mu \exp[-(3.67 + \mu)D / D_0] dD \quad (12)$$

F, G, dBZ_e, k など周波数に依存する変数および関数について、KuPR(KaPR)の周波数で計算されたことを明示する場合は添字1(2)をつける。また、太字で表すことで、両周波数に対応する値を要素とするベクトルであることを示す。例えば、 $\mathbf{dBZ}_e = (dBZ_{e1}, dBZ_{e2})^T$ である。

次に、 dBZ_m について考える。ここで、レンジ内の一樣性を仮定しているから、図-1に示すようにレーダから当該レンジの中央までの往復で生じる減衰(dBA とする)の影響を受けていると考えれば良い。すなわち、

$$dBZ_m = dBZ_e - dBA \quad (13)$$

と表現できる。式(9),(10),(13)から、 M 個のレンジにおける \mathbf{dBZ}_m を M 個のレンジにおける (N_0, D_0) で表すことができる。これは、観測数(方程式の数)が $2M$ 個に対して、未知数が $2M$ 個と同数である連立非線形方程式であり、本論文において「基礎方程式」と呼ぶ。

(3) 補題の設定

以下の議論のために、次の2つの擬似物理量 $dBZ_e^{(-)}$ および $dBZ_e^{(+)}$ を定義しておく。

$$dBZ_e^{(-)} = dBZ_m + dBA^{(-)} \quad (14)$$

$$dBZ_e^{(+)} = dBZ_m + dBA^{(+)} \quad (15)$$

ただし、 $dBA^{(-)}$ はレーダから当該レンジ上端までの往復で生じる減衰量であり、 $dBA^{(+)}$ はレーダから当該レンジ下端までの往復で生じる減衰量である(図-1参照)。当該レンジ半分の往復で生じる減衰は、 $k \times (L/2) \times 2 = kL$ であるから、式(16),(17)のように、あるレンジの $dBZ_e^{(-)}$ および $dBZ_e^{(+)}$ は、そのレンジの N_0 と D_0 で表現できる。

$$dBZ_e^{(-)} = dBZ_e - kL = 10 \log_{10} N_0 + F(D_0) - N_0 \times G(D_0) \times L \quad (16)$$

$$dBZ_e^{(+)} = dBZ_e + kL = 10 \log_{10} N_0 + F(D_0) + N_0 \times G(D_0) \times L \quad (17)$$

ここで、以下の3つの補題を定義しておく。

「補題O」 dBZ_e を既知として (N_0, D_0) を求める

「補題F」 $dBZ_e^{(-)}$ を既知として (N_0, D_0) を求める

「補題B」 $dBZ_e^{(+)}$ を既知として (N_0, D_0) を求める

補題はレンジごとに独立して設定することができる。いずれも、観測数が2個に対して、未知数が2個の連立非線形方程式である。

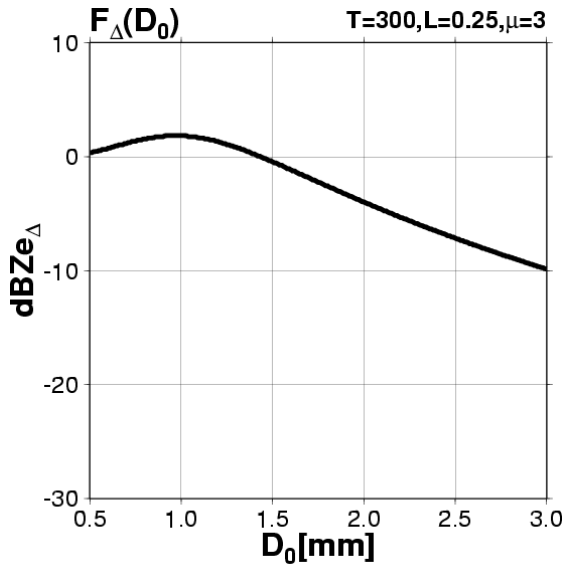


図-2 $F_{\Delta}(D_0)$. $T=300[\text{K}]$, $L=0.25[\text{km}]$, $\mu=3$ の場合.

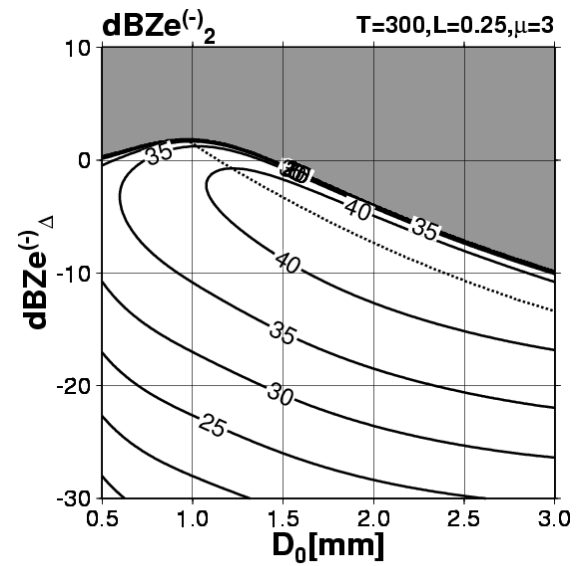


図-3 D_0 - $\text{dBZ}_e^{(-)}_{\Delta}$ 平面における $\text{dBZ}_e^{(-)}_2$ の等値線図. ただし, 点線は $\partial \text{dBZ}_e^{(-)}_2 / \partial D_0 = 0$ の等値線を示す.

3. 既往の研究における解法

2節で定義された基礎方程式の解法を考える. いくつかの既往研究⁴⁾では, 表面参照法により推定されたレーダから地表面までの減衰量(PIA)を観測量に加えて解いている. PIAは2つの周波数について求まるから, 観測量が $2M+2$ 個となり, 未知数の個数よりも多くなる. PIAは地表面のすぐ上にあるレンジ M に対する $\text{dBA}^{(+)}$ のことであるから, 式(15)によりレンジ M に対する $\text{dBZ}_e^{(+)}$ が求まる. レンジ M において補題Bが解ければ, 式(10)により k が計算できる. 次に, レンジ $(M-1)$ に対する $\text{dBA}^{(+)}$ は, レンジ M の $\text{dBA}^{(+)}$ から $k \times 2L$ を引くことで求まる. 以下, この順で下から上のレンジについて順次, 補題Bを解くことで, 基礎方程式を解く. これは, いわゆる後退法と呼ばれる解法である.

これに対して, いわゆる前進法は上から下のレンジの順に解くものである. レンジ1に対しての $\text{dBA}^{(-)}$ は0であるから, 式(14)から $\text{dBZ}_e^{(-)} = \text{dBZ}_m$ である. 補題Fを解くことができれば (N_0, D_0) が求まり, さらに k が得られるから, レンジ2に対しての $\text{dBA}^{(-)}$ も $k \times 2L$ として求まる. 以下, これを繰り返す. 一周波数の場合, 前進法はHitschfeld-Bordan法⁵⁾と呼ばれるが, 後退法に比べて解が発散しやすい⁶⁾.

一方で後退法も, 特に陸上では表面参照法の信頼性が低い⁷⁾ため, 精度に問題がある. そこで, Mardiana et al.⁸⁾では, 表面参照法に頼らない後退法を提案している. 具体的には, i を繰返し数として, PIAを $\text{PIA}[i]$ と仮定して後退法により全レンジの (N_0, D_0) を求める. ここから, 式(10)により求めた k を積算することで改めてPIAを計算できる. この値を $\text{PIA}[i+1]$ とする. $\text{PIA}[i]$ と $\text{PIA}[i+1]$ の差が十分に小さくなるまで繰り返す. なお, 最初のステップ

では $\text{PIA}[0]=0$ を仮定する. この方法を繰返し法と呼ぶことにする.

Adhikari et al.⁹⁾は, 基礎方程式に繰返し法を適用した結果, 真値と異なる解が得られる場合があることを示している. すなわち, PIAは収束するが, その際に得られる (N_0, D_0) が真値と異なる. $M=17$, $L=0.25\text{km}$, $\mu=0$, $N_0=8000\text{mm}^{-1}\text{m}^{-3}$ の場合, $D_0=1.1\text{mm}$ (降水強度 3.2mm h^{-1})ならば正解が得られるが, $D_0=1.5\text{mm}$ (降水強度 13.7mm h^{-1})では正解が得られない. Rose et al.¹⁰⁾も同様の結果を示し, 正解が得られる場合の (N_0, D_0) の条件を経験的に示している. このように基礎方程式に対する既存の解法はいずれも適用に限界がある.

4. 解の個数

3節で紹介した既往研究からも分かるように, 基礎方程式は, 本質的には補題Fまたは補題Bの積み重ねである. 本節では, 補題Oを加えた3つの補題について解の特性と解法を調べる. なお, 以下ではDPRの設計にあわせて $L=0.25\text{km}$, PR標準アルゴリズムに習い $\mu=3$ とした. また, 粒子の温度 $T=300\text{K}$ とした. T は式(3)の複素屈折率の計算に用いるが, 以下の結果に強くは影響しない.

(1) 補題O (dBZ_e が既知の場合)

式(9)を改めて2つの周波数に対して示す.

$$\text{dBZ}_{e1} = 10 \log_{10} N_0 + F_1(D_0) \quad (9-1)$$

$$\text{dBZ}_{e2} = 10 \log_{10} N_0 + F_2(D_0) \quad (9-2)$$

(9-2)から(9-1)を引いて N_0 を消去する.

$$\text{dBZ}_{e\Delta} = F_{\Delta}(D_0) \quad (18)$$

ただし, 添え字 Δ はKaPRの場合からKuPRの場合を引いた差であることを示す. 右辺の $F_{\Delta}(D_0)$ は図-2に表される

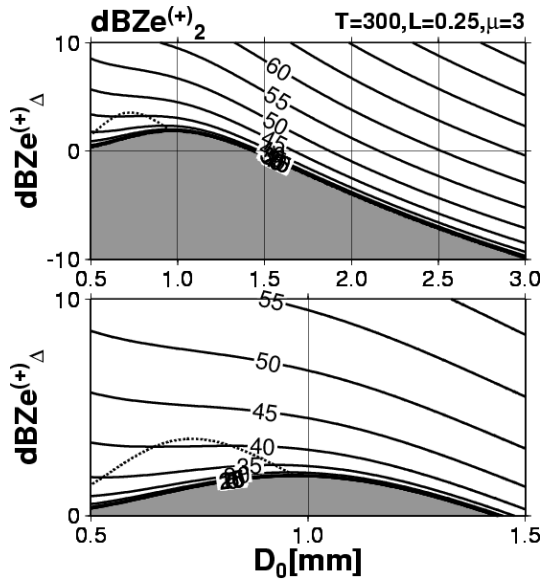


図-4 $D_0-dBZ_e^{(+)}_{\Delta}$ 平面における $dBZ_e^{(+)}_2$ の等値線図. 下の図は、上の図の左上部分を拡大表示したもの. ただし、点線は $\partial dBZ_e^{(+)}_2 / \partial D_0=0$ の等値線を示す.

ような関数形となり、 $D_0=D_{0s}$ において極大値をとる. この場合 D_{0s} は約1.0mmである. $0 \leq dBZ_{e\Delta} < F_{\Delta}(D_{0s})$ である場合、 $dBZ_{e\Delta}$ から D_0 を一意に決めることができない. $dBZ_{e\Delta} < 0$ および $dBZ_{e\Delta} = F_{\Delta}(D_{0s})$ である場合には解が一意に定まる. D_0 が求まれば、(9-1)または(9-2)に代入することで N_0 を求めることができる. 以上から、補題Oは解が1つまたは2つ存在することが分かる.

(2) 補題F ($dBZ_e^{(-)}$ が既知の場合)

式(16)について2つの周波数の差をとる.

$$dBZ_e^{(-)}_{\Delta} = F_{\Delta}(D_0) - N_0 \times G_{\Delta}(D_0) \times L \quad (19)$$

式(19)を N_0 について解き、その値をいずれかの周波数についての式(16)に代入すると、 N_0 が消去され D_0 のみの方程式が得られる. 解の個数を視覚的に考察するために、横軸 D_0 、縦軸 $dBZ_e^{(-)}_{\Delta}$ をとった平面上に、 $dBZ_e^{(-)}_2$ の等値線を示した(図-3). グレーで示された範囲の(D_0 , $dBZ_e^{(-)}_{\Delta}$)をみたら解は存在しない. 補題Fは、 $dBZ_e^{(-)}_{\Delta}$ および $dBZ_e^{(-)}_2$ を既知として D_0 を求める問題と等値であり、解の個数は、図-3の横軸に平行な直線と等値線の交点の個数に対応する. ここで点線は $\partial dBZ_e^{(-)}_2 / \partial D_0=0$ となる場合を示す. 補題Fの解は点線の左側と右側に2つ存在する場合がある.

(3) 補題B ($dBZ_e^{(+)}$ が既知の場合)

式(17)について2つの周波数の差をとる

$$dBZ_e^{(+)}_{\Delta} = F_{\Delta}(D_0) + N_0 \times G_{\Delta}(D_0) \times L \quad (20)$$

補題Fの場合と同様にして、 N_0 を消去して D_0 のみの方程式を得ることができる. 図-4に、横軸 D_0 、縦軸 $dBZ_e^{(+)}_{\Delta}$ をとった平面上に、 $dBZ_e^{(+)}_2$ の等値線を示す. 横軸に平行な直線と等値線の交点の個数が、補題Bの解の個数に対応する. 点線は、 $\partial dBZ_e^{(+)}_2 / \partial D_0=0$ となる場合である. 多くの場合は解の個数は1個であるが、 $dBZ_e^{(+)}_{\Delta} > 0$ の場合

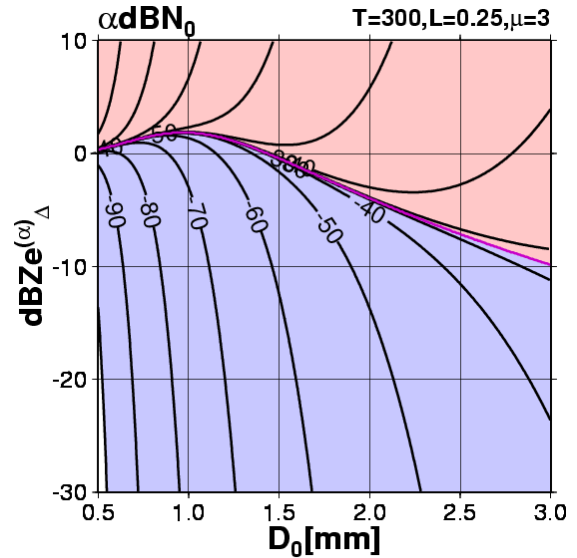


図-5 $D_0-dBZ_e^{(a)}_{\Delta}$ 平面における $\alpha \times N_0$ の分布(ただし、等値線の目盛りは $\alpha \times dBN_0$ で表示する). 薄い赤(青)で示すのは $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$)となる領域、紫線は $\alpha \times N_0=0$ の等値線.

に解が3個存在する場合も見られる. 例えば、 $dBZ_e^{(+)}_1=36.1\text{dB}$ 、 $dBZ_e^{(+)}_2=39.1\text{dB}$ ($dBZ_e^{(+)}_{\Delta}=3\text{dB}$)に対して、 D_0 の解は0.503mm, 0.796mm, 0.902mmの3個存在する.

(4) 統一した表現

以上3つの補題は、次の式(21)で定義される $dBZ_e^{(a)}$ から(N_0, D_0)を求める問題として統一的に表現できる.

$$dBZ_e^{(a)} = 10 \log_{10} N_0 + F(D_0) + \alpha \times N_0 \times G(D_0) \times L \quad (21)$$

補題Oは $\alpha=0$ の場合、補題Fは $\alpha=-1$ の場合、補題Bは $\alpha=1$ の場合である. 図-5には、横軸 D_0 、縦軸 $dBZ_e^{(a)}_{\Delta}$ として、 $\alpha \times N_0$ の等値線を示している. $\alpha \times N_0=0$ の等値線は、図-2の $F_{\Delta}(D_0)$ の関数と一致し、 $\alpha \times N_0 < 0$ となる領域は、図-3に示した補題Fの解が存在する範囲に対応し、 $\alpha \times N_0 > 0$ となる領域は、図-4に示した補題Bの解が存在する範囲に対応することが確認できる. また、図-6には、 $dBZ_e^{(a)}_1$ の等値線図を示す. この図からも、各補題の解の個数について調べることができる. 点線は $\partial dBZ_e^{(a)}_1 / \partial D_0=0$ を表す線であるが、 $dBZ_e^{(a)}_{\Delta} / \partial D_0=0$ であるから、点線は $\partial dBZ_e^{(a)}_2 / \partial D_0=0$ を表す線とも一致する. なお、緑線については6節で後述する.

5. 解の選択

前節に示すように、補題O,F,Bはいずれも解が2つ以上存在する場合がある. こうした場合に、正しい解を選択するためには、何らかの条件を導入する必要がある.

(1) $D_0 > D_{0s}$

条件として、 $D_0 > D_{0s}$ を与えることにすれば、補題Oでは解が唯一に求まる. また、補題Fについても、少なくとも今回用いた条件下では、解が唯一に定まる. $D_0 < D_{0s}$

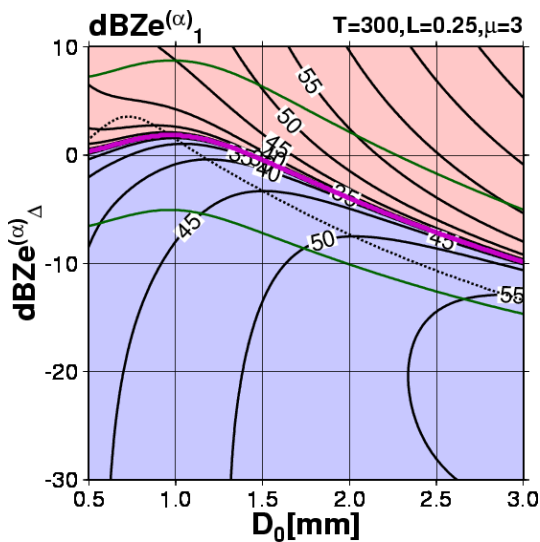


図-6 D_0 - $dBZ_e^{(\alpha)}_{\Delta}$ 平面における $dBZ_e^{(\alpha)}_1$ の等値線図. 点線は $\partial dBZ_e^{(\alpha)}_1 / \partial D_0 = 0$ の等値線を示す. また, 緑線は安定度が0の線であり, 内側が安定度が正となる.

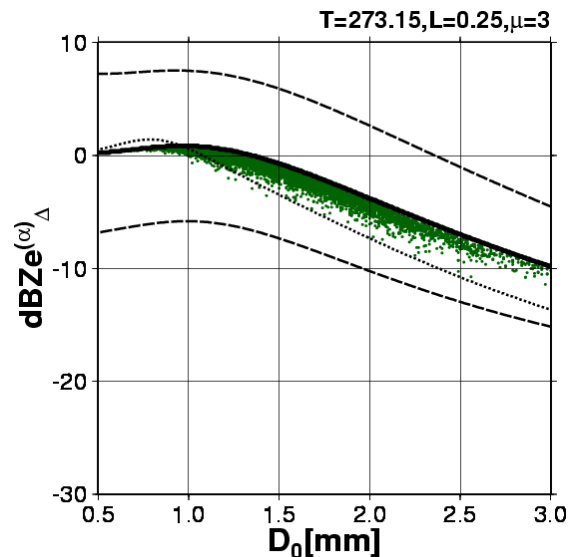


図-7 緑点は2A25から再現された $(D_0, dBZ_e^{(-)}_{\Delta})$. 実線は $\alpha=0$, 点線は $\partial dBZ_e^{(\alpha)}_2 / \partial D_0 = 0$, 破線は安定度 $T=0$ を示す. ($T=273.15$ [K]で計算している).

となるのは, 相当に弱い雨であり, Mie散乱の影響が小さく二周波を使う意味に乏しい点から, $D_0 > D_{0s}$ という条件で限定することは妥当である. しかし, 補題Fの場合には, D_0 より大きい解が2つ存在する場合があるから, この条件を導入しても解が唯一には定まらない. このことは基礎方程式の解法として, 補題Fを用いる前進法は, 補題Bを用いる後退法に比べて, 正しい解を得ることが困難である理由を示唆している.

(2) TRMM/PR標準プロダクトに基づく解の経験的分布

解の選択のための良い条件を作るには, 現実の雨がどのような経験的分布を持つかを調べてデータベース化することが一つの最善な方法であろう. ここでは, TRMM/PR標準プロダクト2A25¹¹⁾を用いて, 解の経験的分布を調べる予備的考察を行った. 2A25では, 次式(22)で表される k - Z_e 関係を用いている.

$$k = \varepsilon \times \alpha \times Z_e^{\beta} \quad (22)$$

ここで, α および β は降水タイプとレンジ位置により決められる定数であり, ε はレンジ位置には依存せずパスごとに一定の値であり, 表面参照法により修正される. 式(22)の両辺を Z_e で割り, 式(23)を得る.

$$k/Z_e = \varepsilon \times \alpha \times Z_e^{\beta-1} \quad (23)$$

この式の値は2A25により計算される. 一方で, 式(9)および(10)から,

$$k/Z_e = G(D_0) / 10^{F(D_0)/10} \quad (24)$$

として, k/Z_e を D_0 の関数で表現できる. この関数は単調増加である. したがって, 2A25から D_0 を算出することが可能である. D_0 が求めれば, 式(10)により N_0 が算出され, さらにDPRの周波数に対応した観測量も模擬できる.

2A25の軌道番号20700から20709までの10軌道を対象として, 上述の方法によりDPRの観測を模擬した. その際, 0°Cの水に相当するレンジのみを用いる. したがっ

て, $T=273.15$ Kとして計算する. $\mu=3.0$, $L=0.25$ kmはこれまでと同じである. 結果を図-7に示す. 図-7は, 図-6と同様に横軸が D_0 , 縦軸が $dBZ_e^{(\alpha)}_{\Delta}$ であり, $\alpha=0$ に相当する線(実線)および $\partial dBZ_e^{(\alpha)}_2 / \partial D_0 = 0$ に相当する線(点線)を示している. 2A25から再現された $(D_0, dBZ_m^{(-)}_{\Delta})$ の結果が実線より下側($\alpha < 0$ の領域)に示されている. 点線より左側(右側)に位置する場合, 補題Fの2つの解のうち, D_0 が小さい(大きい)方の解であることを示す. 全137072個の降雨ケースのうち, D_0 が小さい方の解が正解となるのは26436個(19%)であり, 大きい方の解が正解となるのは110636個(81%)であった. この結果からは, D_0 が大きい解を選ぶのが良いと考えられるが, 経験的分布については様々なデータに基づいたさらなる検討が必要である.

6. 解の安定性

繰り返し法では, 前節で述べたような解の選択が考慮されていない. このため, 暗黙のうちいずれかの解を選択していることになり, 必ずしも正しい解を選択できないと考えられる.

繰り返し法の問題点を説明するために, 補題F(または補題B)を以下の方法で解くことを考える.

- [1] k を仮定する($k[i]$ とする. ただし, i は繰り返し数)
- [2] k を式(16)(または式(17))に代入して dBZ_e を求める.
- [3] 補題Oに帰着するので, 補題Oを解く.
- [4] D_0 を式(9)に代入して, N_0 を求める.
- [5] D_0, N_0 を式(10)に代入して, k を求める($k[i+1]$ とする)
- [6] $k[i]$ と $k[i+1]$ の差が一定以下になるまで繰り返す.

ここで, 問題となるのはステップ[3]およびステップ[6]である. 言い換えると, 以下に述べるステップ[6]の

問題が解決するならば、補題F(または補題B)は補題Oと等価である。

解 $\mathbf{R}=(N_0, D_0)$ の周りの微小な変動を $\Delta\mathbf{R}$ として、これに対応する $\Delta\mathbf{BZ}_e$ および \mathbf{k} の変動を $\Delta\mathbf{dBZ}_e$ および $\Delta\mathbf{k}$ と表す。このとき、十分に小さい任意の $\Delta\mathbf{R}$ に対して、

$$|\Delta\mathbf{dBZ}_e| > |\Delta\mathbf{k} \times L| \quad (25)$$

が成り立つ場合、真値(\mathbf{k}_i と書く)に十分近い $\mathbf{k}[i]$ を仮定すれば、 $|\mathbf{k}[i]-\mathbf{k}_i| > |\mathbf{k}[i+1]-\mathbf{k}_i|$ が成り立つ。この場合を、解 \mathbf{R} は安定であると呼ぶことにする。一方で、(25)が成り立たない場合には、真値に十分近い $\mathbf{k}[i]$ を仮定しても、 $|\mathbf{k}[i]-\mathbf{k}_i| < |\mathbf{k}[i+1]-\mathbf{k}_i|$ となるため、 \mathbf{k} が真値に収束しない。この場合、解 \mathbf{R} は不安定であると呼ぶことにする。解 \mathbf{R} が安定となる条件は、具体的に次のように導出される。

$\Delta\mathbf{R}=(\Delta N_0, \Delta D_0)^T=(\delta \cos \theta, \delta \sin \theta)^T$ とおく。このとき、

$$\Delta\mathbf{dBZ}_e = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathbf{dBZ}_e}{\partial N_0} & \frac{\partial\mathbf{dBZ}_e}{\partial D_0} \end{pmatrix} \Delta\mathbf{R}; \Delta\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial N_0} & \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial D_0} \end{pmatrix} \Delta\mathbf{R} \quad (26)$$

と書くことができる。安定性の条件は、以下の式(27)で導出される S が任意の θ に対して正となることである。

$$\begin{aligned} S &= |\Delta\mathbf{dBZ}_e|^2 - |\Delta\mathbf{k} \times L|^2 \\ &= \frac{\delta^2}{2} \left[\left| \frac{\partial\mathbf{dBZ}_e}{\partial N_0} \right|^2 - \left| \frac{\partial\mathbf{k} \times L}{\partial N_0} \right|^2 + \left| \frac{\partial\mathbf{dBZ}_e}{\partial D_0} \right|^2 - \left| \frac{\partial\mathbf{k} \times L}{\partial D_0} \right|^2 \right] \\ &+ \frac{\delta^2}{2} \left[\left| \frac{\partial\mathbf{dBZ}_e}{\partial N_0} \right|^2 - \left| \frac{\partial\mathbf{k} \times L}{\partial N_0} \right|^2 - \left| \frac{\partial\mathbf{dBZ}_e}{\partial D_0} \right|^2 + \left| \frac{\partial\mathbf{k} \times L}{\partial D_0} \right|^2 \right] \cos 2\theta \\ &+ \delta^2 \left[\frac{\partial\mathbf{dBZ}_e}{\partial N_0} \cdot \frac{\partial\mathbf{dBZ}_e}{\partial D_0} - \frac{\partial\mathbf{k} \times L}{\partial N_0} \cdot \frac{\partial\mathbf{k} \times L}{\partial D_0} \right] \sin 2\theta \\ &= \delta^2 [T + U \cos 2\theta + V \sin 2\theta] \\ &= \delta^2 [T + \sqrt{U^2 + V^2} \cos(2\theta + \varphi)] \quad (27) \end{aligned}$$

ただし、 T, U, V は導出の途中で簡略に記すために用いている。また、 $\varphi = \cos^{-1}(U/\sqrt{U^2+V^2})$ である。 S の各項を計算すると、 $|T| = \sqrt{U^2+V^2}$ が良い近似で成り立つため、任意の θ に対して $S > 0$ となる条件は、 $T > 0$ と近似できる。 T を安定度と呼ぶ。 $T=0$ となる線を図-6および図-7に重ねて示している。2つの線の内側が $T > 0$,すなわち安定解の存在する部分であり、外側が不安定解の存在する部分である。図-6から分かるように、補題Fに対して、2つの解の組み合わせは、安定解2つ、不安定解2つ、安定解と不安定解1つずつのいずれも起こりうる。

図-7に示したすべてのケースは安定解であった。また、既往の研究^{9),10)}で、正しい解が得られない条件も、以上の定義では安定解となる場合が多い。1つのレンジでは理論上安定解となる場合であっても、複数のレンジを対象とする場合、数値計算上生じる誤差が次のレンジへと伝播することにより、正しい解が得られないことが背景にあると考えられる。

7. まとめ

二周波レーダ降水強度推定アルゴリズムの基礎方程式について、その特性と解法を既往の研究をふまえて考察

した。複数のレンジに対する基礎方程式は、1つのレンジに対する補題に分解して考えることができる。既往の研究で提案されている繰り返し法は、暗黙のうちに解の選択を行っており、真値に収束することが保障されない。前進法を構成する補題は一般に2つの解が存在するため、解の選択基準を作成する必要がある。後退法は、 $D_0 > D_{0c}$ という条件の下で解が一意に求まるため前進法よりも安定である。ただし、後退法には正確な表面参照法が必要となる。表面参照法の精度向上は、DPR用のアルゴリズム開発における重要な課題の一つである。

謝辞：本研究は宇宙航空研究開発機構とのTRMMデータ利用公募型共同研究「Development of surface reference technique for dual-frequency precipitation radar」(PI：沖大幹)の成果の一部である。

参考文献：

- 1) 例えば, Su, F., Y. Hong, and D. P. Lettenmaier: Evaluation of TRMM Multisatellite Precipitation Analysis (TMPA) and its utility in hydrologic prediction in the La Plata basin. *J. Hydromet.*, vol.9, pp622-640, 2008.
- 2) 例えば, Eccles, P. J., and E. A. Mueller: X-band attenuation and liquid water content estimation by a dual-wavelength radar. *J. Appl. Meteorol.*, vol.10, pp1252-1259, 1971.
- 3) Meneghini, R., T. Kozu, H. Kumagai, and W.C. Bonczyk: A study of rain estimation methods from space using dual-wavelength radar measurements at near nadir incidence over ocean. *J. Atmos. Ocean. Technol.*, Vol.9, pp364-382, 1992.
- 4) 例えば, Kozu, T., K. Nakamura, R. Meneghini, and W.C. Bonczyk: Dual-parameter radar rainfall measurement from space: A test result from an aircraft experiment. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, Vol.39, pp690-703, 1991.
- 5) Hitschfeld, W., and J. Bordan: Errors inherent in the radar measurement of rainfall at attenuating wavelengths. *J. Meteor.*, Vol.11, pp58-67, 1954.
- 6) Iguchi, T., and R. Meneghini: Intercomparison of single-frequency methods for retrieving a vertical rain profile from airborne or spaceborne radar data. *J. Atmos. Ocean. Technol.*, Vol.11, pp1507-1516, 1994.
- 7) Seto, S., and T. Iguchi: Rainfall-induced changes in actual surface backscattering cross sections and effects on rain rate estimates by spaceborne precipitation radar. *J. Atmos. Ocean. Technol.*, Vol.24, pp1693-1709, 2007.
- 8) Mardiana, R., T. Iguchi, and N. Takahashi: Dual-frequency rain profiling method without the use of surface reference technique. *IEEE. Trans. Geosci. Remote Sensing*, Vol.42, pp2214-2225, 2004.
- 9) Adhikari, N., T. Iguchi, S. Seto, and N. Takahashi: Rain retrieval performance of a dual-frequency precipitation radar technique with differential-attenuation constraint. *IEEE. Trans. Geosci. Remote Sensing*, Vol.45, pp2612-2618, 2007.
- 10) Rose, C. R., and V. Chandrasekar: A systems approach to GPM dual-frequency retrieval. *IEEE. Trans. Geosci. Remote Sensing*, Vol.43, pp1816-1826, 2005.
- 11) Iguchi, T., T. Kozu, R. Meneghini, J. Awaka, and K. Okamoto: Rain-profiling algorithm for the TRMM precipitation radar. *J. Appl. Meteorol.*, Vol.39, pp2038-2052, 2000.