

DOI: CNKI: 32-1309/P. 20110115. 2208. 004

# 浓度梯度引起的固相速度测量误差

石 健, 郭 波, 弓扶元, 何小刚, 李丹勋

(清华大学水利水电工程系, 水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

**摘要:** 用粒子示踪技术测量明渠挟沙水流中固相颗粒的速度时, 流速梯度和浓度梯度的存在会引起测量误差。选用典型的垂线流速与浓度分布公式对时均速度测量误差进行分析, 得出了误差的解析表达式。对该解析式的理论分析表明, 测量误差恒小于零, 即速度测量值比实际值偏小。误差的大小与采样窗口的相对位置、尺寸及颗粒的悬浮指数有关。对误差大小随自变量的变化规律进行的数值分析结果表明, 在一定的流场条件下, 测量误差的最大值出现在床面附近, 误差从床底至水面呈现出先减小后增大的特点。

**关键词:** 流速; 浓度; 梯度; 误差; 粒子示踪测速

**中图分类号:** TV 149.3      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-6791(2011)01-0067-08

实验测量是流体力学中研究复杂流场的重要手段。明渠挟沙水流是自然界中常见的固液两相流, 对其流速分布和紊动特性的研究, 虽已有很多试验成果, 但结果之间还存在矛盾, 远未达成共识<sup>[1-7]</sup>。这一方面体现了明渠挟沙水流的复杂性, 另一方面也表明所使用的测量技术可能存在一定局限性。

明渠紊流流速分布的测量方法通常有传统的接触式和非接触式两类, 前者如热丝法, 后者如激光测速(LDV)、粒子图像测速(PIV)、粒子示踪测速(PTV)等。不同的流速测量方法有一个共同的特点, 即都是在采样窗口范围内对所测得的数据进行统计平均。不同之处仅在于, LDV等仪器的采样窗口的尺寸大小是确定的(一般为mm或cm量级), 空间平均的过程固化在仪器内部, 使用者无法改变; 而PIV/PTV法的过程是计算机程序的后处理, 试验者可自行确定采样窗口(或相关域)的大小<sup>[2,4-5]</sup>。由于流速梯度和浓度梯度的存在, 空间平均的过程会带来系统误差。首先, 流速梯度的存在使得空间平均后的结果偏离采样窗口中心点的实际流速, 并且这个偏差不是常数, 而是采样窗口位置和大小的函数<sup>[8]</sup>。其次, 在应用PTV方法测量固相悬浮颗粒的速度时, 单个颗粒的速度虽然能准确测得, 但由于重力作用, 颗粒沿垂向的分布上少下多, 存在浓度梯度, 所以采样窗口下部所获得的源数据就多于上部, 空间平均的结果就会使流速计算值向下部偏移, 引起系统误差。

实验流体力学中对紊流测量的各种误差来源分析与估计一直非常重视, 文献[8]系统地讨论了流速梯度对测量误差的影响, 并给出了误差大小的解析表达式。然而涉及浓度梯度影响这方面的研究还未见报道, 连平均流速和脉动强度是被高估还是低估这一基本问题也尚无明确解答。本文将分析流速梯度和浓度梯度共同存在时颗粒相时均速度测量误差的大小, 并给出误差的解析表达式和数值计算结果。研究结果不仅具有一定的理论意义, 而且有助于改变之前实验中完全依靠经验确定采样窗口大小的办法<sup>[2,4-5,9]</sup>, 对实验设计(确定采样窗口大小)和数值模拟(确定计算网格大小)有一定的参考价值。由于不同测量仪器的空间平均方法并不一致, 本文的分析结果只针对PTV方法。

收稿日期: 2010-03-22; 网络出版时间: 2011-01-15

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/32.1309.P.20110115.2208.004.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50779023); 清华大学SRT资助项目(082T0019)

通信作者: 李丹勋, E-mail: lidx@tsinghua.edu.cn

# 1 流速测量误差的理论分析

## 1.1 明渠二维紊流时均流速一般表达式

考虑平面二维恒定均匀明渠流动,沿流线方向(纵向)建立  $x$  轴,自渠底竖直向上(垂向)建立  $y$  轴,如图 1 所示(只适合底坡很小的情况)。任意点的瞬时流速有  $x$  和  $y$  方向的分量,记为  $(U, V)$ 。本文只研究  $x$  向速度  $U$ ,不考虑  $y$  向速度  $V$ 。

把  $U$  分解成时均速度  $U_A(y)$  和脉动速度  $u(y, t)$ :

$$U(y, t) = U_A(y) + u(y, t) \quad (1)$$

对于常见的明渠均匀紊流,  $U_A(y)$  沿  $x$  方向不变,沿  $y$  方向存在流速梯度,即

$$\frac{\partial U_A(y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_A(y)}{\partial y} \neq 0 \quad (2)$$

$U_A(y)$  由下式定义:

$$U_A(y) = \frac{1}{T} \int_0^T U(y, t) dt \quad (3)$$

式中  $T$  是能消除随机脉动效果的特征时间,即  $\int_0^T u(y, t) dt = 0$ 。

## 1.2 速度测量误差的一般形式

速度测量误差定义为测速方法给出的测量值与所测位置实际速度之差。测速仪器的采样窗口见图 1<sup>[8]</sup>,图中  $h$  为水深,  $\Delta h$  为采样窗口大小,  $y_m$  为采样窗口中心位置。

在不短于特征时间  $T$  的时段内,对采样窗口内速度值取空间平均得到测量值,记为  $\bar{U}_m$ ,  $y = y_m$  处的实际流速表示为  $U_A(y_m)$ 。则速度测量误差可表示为

$$\Delta U_m = \bar{U}_m - U_A(y_m) \quad (4)$$

按照 PTV 测速方法的空间平均过程,在采样窗口内测得多个悬浮粒子的运动速度之后,将所有这些速度进行平均即可得到窗口中心处的速度值。该过程可以用下式表达:

$$\bar{U}_m = \frac{\int_{y_m - \Delta h/2}^{y_m + \Delta h/2} S_v(y) U_A(y) dy}{\int_{y_m - \Delta h/2}^{y_m + \Delta h/2} S_v(y) dy} \quad (5)$$

式中  $S_v(y)$  为颗粒在  $y$  方向的浓度分布。

把式(5)代入式(4),可得流速测量误差的表达式:

$$\Delta U_m = \frac{\int_{y_m - \Delta h/2}^{y_m + \Delta h/2} S_v(y) U_A(y) dy}{\int_{y_m - \Delta h/2}^{y_m + \Delta h/2} S_v(y) dy} - U_A(y_m) \quad (6)$$

式(6)就是速度测量误差的解析表达式。由上式可以看出,  $\Delta U_m$  是  $y_m$  和  $\Delta h$  的函数,并且与  $S_v(y)$ 、 $U_A(y)$  都有关。

## 1.3 测量误差的具体形式

对于不同流速分布和颗粒浓度分布,测量误差有不同的具体形式。本文研究明渠二维挟沙紊流,流速分布选用对数律分布公式<sup>[10]</sup>:

$$\frac{U_A(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u_* y}{\nu}\right) + B \quad (7)$$

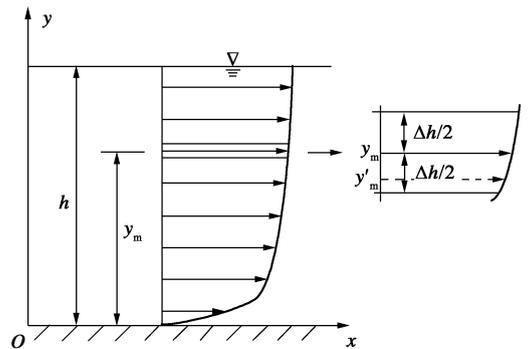


图 1 采样窗口和流场相对位置示意图

Fig. 1 Vertical location and size of the sampling bin

式中  $u_*$  为摩阻流速;  $\nu$  为流体动粘度系数;  $\kappa$  为 Kármán 常数(本文取  $\kappa=0.4$ );  $B$  为由边界条件决定的积分常数。需要指出的是,式(7)是清水水流的流速分布。试验表明在一定条件下悬浮颗粒速度的垂线分布也可以用对数律形式来表示<sup>[11-12]</sup>,作为初步分析,本文用式(7)来近似表示颗粒的速度分布。

浓度分布可用基于扩散理论的 Rouse 公式<sup>[10]</sup>表示。

$$\frac{S_v(y)}{S_v(a)} = \left( \frac{h-y}{y} \frac{a}{h-a} \right)^Z \quad (8)$$

式中  $h$  为水深;  $S_v(a)$  为参考点  $y=a$  处的颗粒浓度;  $S_v(y)$  为任意  $y$  处的颗粒浓度; 指数  $Z$  为 Rouse 数,又称悬浮指标,其表达式为

$$Z = \frac{\omega}{\kappa u_*} \quad (9)$$

式中  $\omega$  为颗粒的静水沉降速率。 $Z$  值表示颗粒在  $y$  方向上分布的均匀程度,其值越小,颗粒分布越均匀。当  $Z=0$  时,  $S_v(y) = S_v(a)$ , 不存在浓度梯度。

注意到式(8)等号左边是比值形式,表示相对浓度。绝对浓度可表示为

$$S_v(y) = \alpha \left( \frac{h}{y} - 1 \right)^Z \quad (10)$$

式中  $\alpha$  为比例系数,由参考点绝对浓度决定。

把式(7)和式(10)代入式(6),得

$$\frac{\Delta U_m}{u_*} = \frac{\int_{y_m-\Delta h/2}^{y_m+\Delta h/2} \alpha \left( \frac{h}{y} - 1 \right)^Z \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{y u_*}{\nu} \right) + B \right] dy}{\int_{y_m-\Delta h/2}^{y_m+\Delta h/2} \alpha \left( \frac{h}{y} - 1 \right)^Z dy} - \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{y_m u_*}{\nu} \right) + B \right] \quad (11)$$

化简上式可得

$$\frac{\Delta U_m}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\int_{y_m-\Delta h/2}^{y_m+\Delta h/2} \ln y \left( \frac{h}{y} - 1 \right)^Z dy}{\int_{y_m-\Delta h/2}^{y_m+\Delta h/2} \left( \frac{h}{y} - 1 \right)^Z dy} - \ln y_m \right] \quad (12)$$

可以发现,式(11)中的  $\alpha$ 、 $\nu$ 、 $B$ 、 $u_*$  均已消去,式(12)中只包含  $y_m$ 、 $\Delta h$ 、 $Z$  和  $h$  这4个变量,进一步可证明变量  $h$  非独立。证明过程如下:

令  $t=y/h$ , 则  $y=ht$ ,  $dy=hdt$ , 且积分上下限变成  $y_m/h - \frac{1}{2}(\Delta h/h)$  与  $y_m/h + \frac{1}{2}(\Delta h/h)$ , 代入式(12)中替换各项,得

$$\frac{\Delta U_m}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\int_{y_m/h - \frac{1}{2}(\Delta h/h)}^{y_m/h + \frac{1}{2}(\Delta h/h)} \ln t \left( \frac{1}{t} - 1 \right)^Z h dt}{\int_{y_m/h - \frac{1}{2}(\Delta h/h)}^{y_m/h + \frac{1}{2}(\Delta h/h)} \left( \frac{1}{t} - 1 \right)^Z h dt} + \ln h - \left( \ln \frac{y_m}{h} + \ln h \right) \right] \quad (13)$$

消去  $h$  和  $\ln h$ , 并把记号  $t$  重新改为  $y$ , 得

$$\frac{\Delta U_m}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\int_{y_m/h - \frac{1}{2}(\Delta h/h)}^{y_m/h + \frac{1}{2}(\Delta h/h)} \ln y \left( \frac{1}{y} - 1 \right)^Z dy}{\int_{y_m/h - \frac{1}{2}(\Delta h/h)}^{y_m/h + \frac{1}{2}(\Delta h/h)} \left( \frac{1}{y} - 1 \right)^Z dy} - \ln \frac{y_m}{h} \right] \quad (14)$$

式(14)说明,测量误差  $\Delta U_m/u_*$  是采样窗口相对大小  $\Delta h/h$ 、窗口中心相对位置  $y_m/h$  和悬浮指标  $Z$  的函数,而与流场的绝对水深  $h$  无关,即  $\Delta U_m/u_* = f(y_m/h, \Delta h/h, Z)$ 。

该函数的定义域,即3个自变量的取值范围分别为: $Z > 0$ 、 $\Delta h/h > 0$ 、 $y_m/h > 0$ 。同时应注意到自变量的

实际物理含义: 采样窗口底部不能低过槽底, 顶部不能高出水面, 记  $a = \frac{y_m}{h} - \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h}$ ,  $b = \frac{y_m}{h} + \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h}$ , 则有  $a > 0$  且  $b < 1$ 。所以  $y_m/h$  和  $\Delta h/h$  应满足

$$\frac{1}{2}(\Delta h/h) \leq y_m/h \leq 1 - \frac{1}{2}(\Delta h/h) \quad (15)$$

使用不在该范围内的  $y_m/h$  与  $\Delta h/h$  值计算出的误差值没有物理意义, 文献[8]中忽视了此问题。

不等式(15)所表示的范围如图2阴影部分所示。

#### 1.4 测量误差的定性分析

式(14)给出了量纲一化的测量误差  $\Delta U_m/u_*$  的表达式, 可以证明,  $\Delta U_m/u_*$  恒小于0, 即测出的速度值不是采样窗口中心  $y_m$  点的速度, 而是其下方低流速区某点  $y'_m$  的流速( $y'_m$  的示意图1)。证明过程如下:

记式(14)的中括号内部分为  $\eta(a, b)$ , 因为  $\kappa > 0$ , 所以  $\Delta U_m/u_*$  的符号由  $\eta(a, b)$  决定。 $a, b$  的定义同上, 注意到  $\frac{a+b}{2} = \frac{y_m}{h}$ , 可将  $\eta(a, b)$  作恒等变换:

$$\eta(a, b) = \frac{\int_a^b \ln y (1/y - 1)^z dy}{\int_a^b (1/y - 1)^z dy} - \ln \frac{y_m}{h} = \frac{\int_a^b \left( \ln y - \ln \frac{a+b}{2} \right) \left( \frac{1/y - 1}{2/(a+b) - 1} \right)^z dy}{\int_a^b \left( \frac{1/y - 1}{2/(a+b) - 1} \right)^z dy} \quad (16)$$

因为  $0 < a < b < 1$ , 则  $y \in [0, 1]$ , 所以  $\eta(a, b)$  中分母的被积函数恒正, 由定积分保号性, 得知分母恒大于零。

下面考察分子的符号。

(1) 当  $Z=0$  时 式(16)可简化为

$$\eta(a, b) = \frac{\int_a^b \left( \ln y - \ln \frac{a+b}{2} \right) dy}{b-a} \quad (17)$$

记分子为  $F(a, b)$ , 则

$$F(a, b) = \int_a^b \ln y dy - \int_a^b \ln \frac{a+b}{2} dy = b \ln b - a \ln a - (b-a) - (b-a) \ln \frac{a+b}{2} \quad (18)$$

式(18)对  $b$  求偏导, 得

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = \ln \frac{2b}{a+b} - 1 - \frac{b}{a+b} < \frac{-b}{a+b} < 0$$

说明  $F(a, b)$  关于  $b$  单调递减, 因  $0 < a < b < 1$  且  $F(a, a) = 0$ , 故  $F(a, b) < 0$ 。所以当  $Z=0$  时  $\eta(a, b) < 0$ 。

(2) 当  $Z > 0$  时 把  $F(a, b)$  拆成两项, 写成

$$F(a, b) = \int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} \left( \ln y - \ln \frac{a+b}{2} \right) dy + \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b \left( \ln y - \ln \frac{a+b}{2} \right) dy \quad (19)$$

记式(19)等号右边第一项为  $F_1(y)$ , 第二项为  $F_2(y)$ 。因为对数函数单增, 所以  $F_1(y)$  的被积函数小于0,  $F_2(y)$  的被积函数大于0, 由定积分保号性得:  $F_1(y) < 0$ ,  $F_2(y) > 0$ , 而  $F_1(y) + F_2(y) = F(a, b) < 0$ 。

定义  $F'_1(y) = \int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} \left( \ln y - \ln \frac{a+b}{2} \right) \theta(y) dy$ ,  $F'_2(y) = \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b \left( \ln y - \ln \frac{a+b}{2} \right) \theta(y) dy$ 。其中  $\theta(y) = \left[ \frac{1/y - 1}{2/(a+b) - 1} \right]^z$ ,  $d\theta/dy$  在  $[0, 1]$  上, 恒小于0, 即  $\theta(y)$  在  $[0, 1]$  上, 单调递减, 在  $[a, (a+b)/2)$  区间上,  $\theta(y) > 1$ , 在  $((a+b)/2, b]$  上  $0 < \theta(y) < 1$ , 当  $y = (a+b)/2$  时,  $\theta(y) = 1$ 。

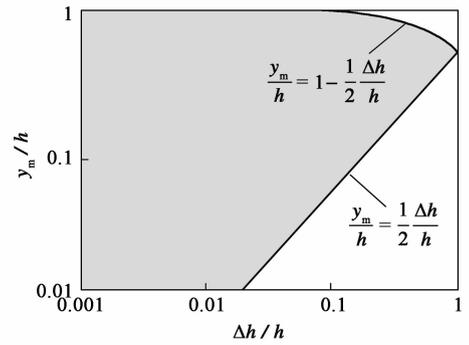


图2  $y_m/h$  和  $\Delta h/h$  取值有意义的范围(阴影部分)

Fig. 2 Effective area (shaded area) of  $y_m/h$  and  $\Delta h/h$

由  $\theta(y)$  的性质可知,在各自积分域上,  $F'_1(y)$  的被积函数绝对值比  $F_1(y)$  的被积函数绝对值大,且均为负值,  $F'_2(y)$  的被积函数绝对值比  $F_2(y)$  的被积函数绝对值小,且均为正值。由定积分保序性得:  $F'_1(y) < F_1(y) < 0$ ,  $0 < F'_2(y) < F_2(y)$ , 所以有

$$F'_1(y) + F'_2(y) < F_1(y) + F_2(y) < 0 \tag{20}$$

故  $Z > 0$  时,  $\eta(a, b) < 0$ 。

综合  $Z = 0$  和  $Z > 0$  所述,  $\eta(a, b) < 0$  对于所有  $a, b \in [0, 1]$  恒成立, 所以  $\Delta U_m/u_*$  恒小于 0。同时从式 (20) 可以看出,  $Z > 0$  的误差相比  $Z = 0$  的误差要大, 并且随着  $Z$  的增大, 误差也相应增大。其物理意义为: 浓度梯度增大, 采样窗口下部颗粒(速度较小)占窗口颗粒总数的比例增大, 低速度值的权重就增大, 速度测量值就更加偏向高浓度(即低流速)区。这就是说, 浓度梯度的存在并不会抵消由流速梯度所引起的误差, 而且会与原误差叠加, 使误差更大。

## 2 测量误差的数值计算结果

尽管可以证明出  $\Delta U_m/u_* < 0$ , 但其表达式很复杂, 用解析方法考察 3 个自变量变化对误差的影响并不直观, 因此采用数值计算方法进行分析。

### 2.1 相同悬浮指标下采样窗口位置和大小变化对误差的影响

分别固定  $Z = 0, 0.5, 1.0, 2.0$ , 绘出  $|\Delta U_m/u_*|$  的等值线图, 纵横坐标分别是  $\Delta h/h$  和  $y_m/h$ , 见图 3, 其中的图线均在图 2 所示区域范围内描绘。每个子图的  $|\Delta U_m/u_*|$  都取 0.5%、1%、2%、5%、10%。

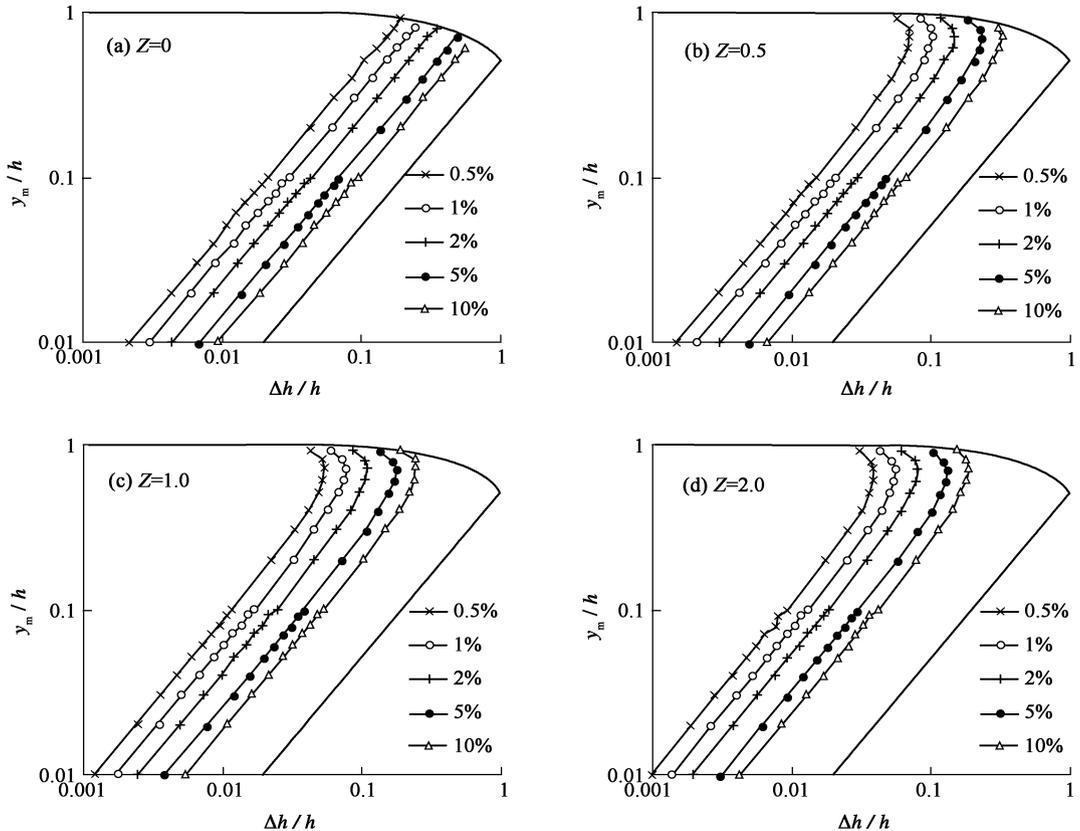


图 3 不同  $Z$  值下测量误差的等值线

Fig. 3 Contour lines of the bias error with different  $Z$  values

图 3(a) 是  $Z=0$ , 即无浓度梯度存在的情况, 等值线基本为直线(线性相关系数在 0.9999 以上)。从图 3(a) 可看出: 在同样的  $y_m/h$  处, 测量误差会随着  $\Delta h/h$  的增大而增大; 若  $\Delta h/h$  不变, 测量误差会随着  $y_m/h$  的增大而减小。即当采样窗口位置不变时, 窗口大小越大, 测量误差越大; 若窗口大小不变, 则越靠近自由水面, 测量误差越小。

对比图 3(b) ~ 图 3(d) 与图 3(a) 发现, 5 条等值线的位置总体向左推移, 而且随着  $Z$  的变大, 等值线的位置越来越靠左。这说明浓度梯度的存在的确增大了测量误差。但注意到当  $Z$  不大时, 等值线向左推移不太明显, 也就是说当颗粒浓度梯度不太大时, 测量误差基本由流速梯度决定, 浓度梯度的影响可以忽略。

图 3(b) ~ 图 3(d) 中还有一个特征, 就是在  $y_m/h$  较大处出现“回拐”, 而且  $Z$  越大, “回拐”得越多, 这与图 3(a) 的直线趋势不同。不论  $Z$  为何值, “回拐”的“顶点”均在  $y_m/h = 0.7$  左右。“回拐”现象的物理意义是: 采样窗口大小不变时, 当采样窗口高度增大, 误差反而变大。这表明, 在测量流场上部流速时, 虽然上部颗粒较少, 采样较为困难, 但为了保持测量精度, 采样窗口并不能开得过大, 以往的实验没有认识到这一点, 普遍采用上大下小的窗口尺寸<sup>[4,8-9]</sup>。

## 2.2 采样窗口位置和大小相同时悬浮指标变化对误差的影响

分别固定  $y_m/h$  取 0.2、0.4、0.7、0.9, 绘出  $|\Delta U_m/u_*|$  与  $Z$  关系图线,  $\Delta h/h$  作为参量, 取值分别为 0.01、0.02、0.05、0.08, 见图 4。图 4(a) ~ 图 4(d) 4 个子图反映了当采样窗口高度逐渐增大时, 测量误差与悬浮指标的关系。从 4 个子图中均可以看出,  $|\Delta U_m/u_*|$  总随着  $Z$  的增大而增大, 而当  $Z$  相同时,  $\Delta h/h$  越大则  $|\Delta U_m/u_*|$  越大, 这与 2.1 节得出的结论相同。对比 4 个子图还可以看出  $y_m/h$  对误差的影响: 当  $y_m/h$  较小, 即采样窗口靠近水槽下部时, 误差较大; 随着  $y_m/h$  的增大, 误差水平整体下降, 至  $y_m/h = 0.7$  左右为最低。 $y_m/h$  继续增大,  $Z$  较大处误差又略有增大(对比图 4(c) 与图 4(d)), 这就是图 3 中“回拐”现象。可以进一步解释如下: 当  $Z$  较小时“回拐”不明显, 所以图 4(d) 中  $Z$  较小的区域内  $|\Delta U_m/u_*|$  仍比图 4(c) 小。

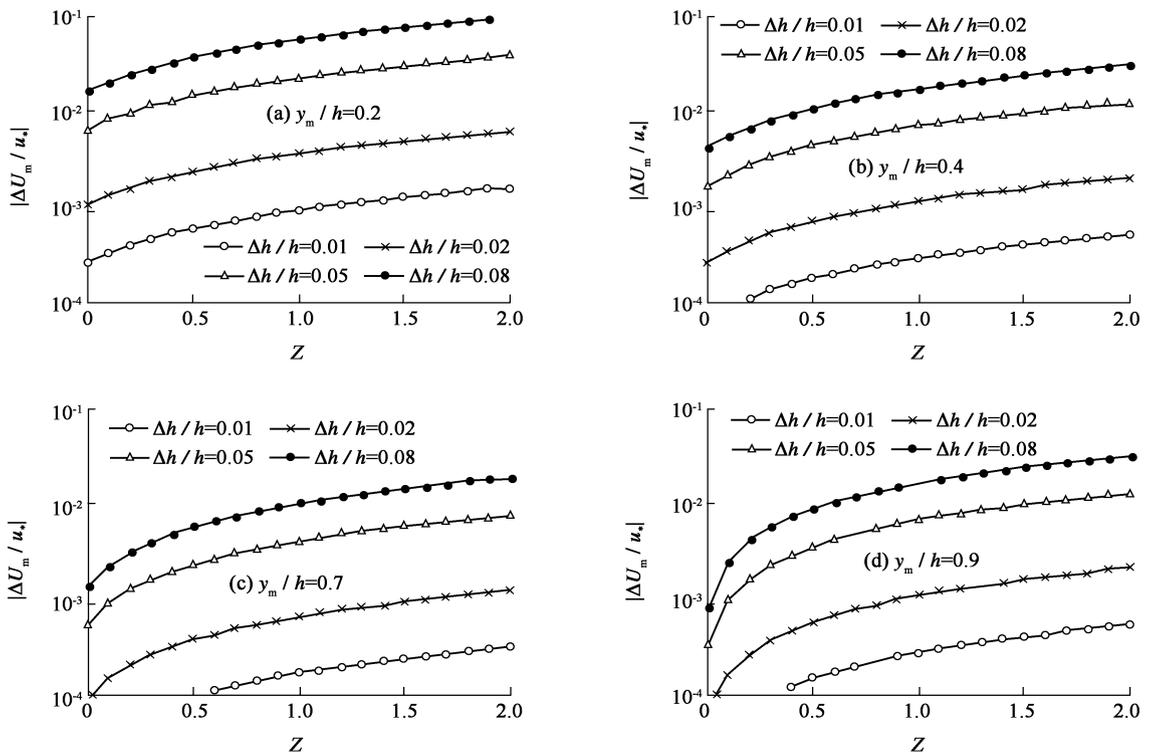


图 4 测量误差与悬浮指标关系曲线

Fig. 4 Variations of the bias error with Rouse parameter

### 3 结 论

通过理论分析和数值计算,对挟沙水流中固相颗粒速度的测量误差进行了分析,结果表明:

(1) 从对误差的贡献来看,流速梯度是“固有”因素,而浓度梯度可以看成“附加影响”,若不存在流速梯度,浓度梯度本身不会造成误差。

(2) 采样窗口中所测得的平均速度不等于采样窗口中心点的实际速度。对于本文所分析的情况,所测得测量值较实际值是偏小的。

(3) 误差大小取决于采样窗口中心位置、窗口大小,也取决于流速分布的形式和浓度分布的不均匀程度,这4个因素相互关联,共同作用。采样窗口越大、浓度梯度越大误差就越大;存在浓度梯度时,误差随着采样窗口高度的增加先减小后增大;当浓度梯度很小时,误差主要由流速梯度造成,浓度梯度的影响可忽略。

在实际测量中,实验者可根据本文结果,在给定误差限、采样窗口位置和悬浮指标的情况下,合理选择采样窗口大小。如果固定采样窗口位置、窗口大小和悬浮指标,则可以求出误差大小,从而对所测得的流速进行修正。

需要指出的是,对数公式和 Rouse 公式具有一定的通用性,因此本文的结果具有一定的代表意义,但由于近底区和近水面区的流速分布和浓度分布比较复杂,难以用对数公式和 Rouse 公式来准确表示,所以本文的分析结果也具有一定的局限性。若需要对误差进行更加客观和深入的分析,可以根据挟沙水流情况,选用更符合实际的流速分布和浓度分布公式。

本文的分析方法也可以方便地推广到其它复杂流场测量的误差分析中,只需选取该流场合适的速度分布和浓度分布公式进行推导和计算即可。需要指出的是,如果采用其它类型的分布公式,推导过程中不一定能消除某些边界常数,情况可能会变得更加复杂。

#### 参考文献:

- [1] WANG Xing-kui, QIAN Ning. Turbulence characteristics of sediment-laden flow[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1995, 115(6): 781-800.
- [2] KAFTORI G, HETSRONI G, BANERJEE S. Particle behavior in the turbulent boundary layer: II: Velocity and distribution profiles [J]. Phys Fluids, 1995, 7(5): 1107-1121
- [3] BEST J, BENNETT S, BRIDGE J S, et al. Turbulence modulation and particle velocities over flat sand beds at low transport rates [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1997, 123(12): 1118-1129
- [4] 李丹勋,王兴奎,禹明忠. 悬移质颗粒运动的脉动强度[J]. 水科学进展, 2002, 13(2): 146-152. (LI Dan-xun, WANG Xing-kui, YU Ming-zhong. Experimental study on velocity fluctuations of suspended particles [J]. Advances in Water Science, 2002, 13(2): 146-152. (in Chinese))
- [5] NEZU I, AZUMA R, Turbulence characteristics and interaction between particle and fluid in particle-laden open channel flows[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, 130(10): 998-1001.
- [6] 周家俞,陈立,叶小云,等. 泥沙影响流速分布规律的试验研究[J]. 水科学进展, 2005, 16(4): 506-510 (ZHOU Jia-yu, CHEN Li, YE Xiao-yun, et al. Experimental study on effect of sediment on velocity distribution in sediment-laden flow[J]. Advances in Water Science, 2005, 16(4): 506-510. (in Chinese))
- [7] 刘春晶,李丹勋,曲兆松,等. 过渡区动床明渠流的流速分布[J]. 水科学进展, 2006, 17(1): 49-54. (LIU Chun-jing, LI Dan-xun, QU Zhao-song, et al. Velocity profile of open-channel flows in the transitional roughness region on mobile beds[J]. Advances in Water Science, 2006, 17(1): 49-54. (in Chinese))
- [8] LI D X, MUSTE M, WANG X K. Quantification of the bias error induced by velocity gradients[J]. Measurement Science and Technology, 2008, 19(1): 5402.
- [9] MUSTE M, YU K, FUJITA I, et al. Two-phase versus mixed-flow perspective on suspended sediment transport in turbulent channel flows[J]. Water Resour Res, 2005, 41(10): 10402-10423.

- [10] 钱宁, 万兆惠. 泥沙运动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984. (CHIEN Ning, WAN Zhao-hui. Mechanics of sediment transport [M]. Beijing: Science Press, 1984. (in Chinese))
- [11] 李丹勋. 悬移质颗粒运动特性的研究[D]. 北京: 清华大学, 1999. (LI Dan-xun. Study on the motion characteristics of suspended particles [D]. Beijing: Tsinghua University, 1999. (in Chinese))
- [12] 禹明忠. PTV 技术和颗粒三维运动规律的研究[D]. 北京: 清华大学, 2002. (YU Ming-zhong. Study on the PTV technique and 3D movement of particles [D]. Beijing: Tsinghua University, 2002. (in Chinese))

## Bias error induced by concentration gradients in the measurement of sediment-laden flows \*

SHI Jian, GUO Bo, GONG Fu-yuan, HE Xiao-gang, LI Dan-xun

(State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Department of Hydraulic Engineering,  
Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The presence of concentration gradients shifts the effective location of the reported mean velocity away from the sampling bin's center in sediment-laden flow measurement with particle tracking velocimetry. Under typical velocity and concentration profiles for open channel flows, the bias error proves to be constantly less than zero, leading to an underestimate of the actual velocity. The error is closely related to three variables which are the relative location of the flow, the size of the sampling bin, and the suspension index of the sediment particles. Numerical analysis shows that the magnitude of the error follows a first-decrease-then-increase pattern from the bottom to the water surface along the vertical.

**Key words:** velocity; concentration; gradient; bias error; particle tracking velocimetry

---

\* The study is financially supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 50779023).