20010301 陸面過程勉強会

Deterministic nonperiodic flow.

By　Edward N. Lorenz.(1963):

In: *Qjournal of Atmomspheric Scicneces*, **20**, 130-141

演者：安形康 agata@iis.u-tokyo.ac.jp

　私はこの文章を読んで, 後頭部をガツンと一撃された感じがし, 髪の毛が逆立った. 彼は知っていた！二四年も前に，彼は知っていたのだ！(中略)たった１２ページで，ローレンツは非線形力学のいくつかの主要なアイデアを予言した．それも，非線形力学がまだ流行になる前に，まだ他の誰もがカオスのような新しい気まぐれの現象が存在することを知らなかった時期に.
（I.スチュアート，須田不二夫・三村和男訳「カオス的世界像：神はサイコロ遊びをするか？」白楊社, 1992 年，162 ページ. Stewart, I., 1989: Does god play dice? : The mathematics of chaos. Penguin books.）

０ ．要旨

　強制力を受け散逸系のある流体運動を表現するために，決定論的な非線形常微分方程式の有限個の組み合わせを構成することができる．この方程式系の解は，位相空間におけるトラジェクトリ(軌跡)として同定することができる．これらの方程式系が有界な解をもつとき，その非周期的解は小さな摂動に対して不安定であり，したがって初期状態がわずかでも異なると全く異なった状態に達しうるということが分かった.

　この有界な解をもつ系は数値的に解いても有界な解を得ることができる．(そこで)セル対流を表す簡単な系を数値的に解いた．あらゆる解は不安定であり，そのほとんどは非周期的であった.

　超長期にわたる天気予測の実現可能性を，これらの結果により得られた観点から検討した.

１ .Introduction

　対流の研究は，rotating-basin experiments と呼ばれる実験によって行われている．これはお茶缶のような水槽に流体を満たし，その中心軸の周りに回転させ，外側および中央から熱を加えるというものである[1]．これらの実験では，設定によって，安定な対流が起こったり対流構造が周期的に変化したり，はたまた全くランダムな流れになったりする．このような乱流構造の研究も盛んに行われつつある.

　本論文では，ある種の流体運動を表す方程式群をさらに単純化したシステムについて検討を行なう．特に，それらが非周期的解をもつときの振る舞いに着目し，その解がどのような特性をもっているか詳しく検討する.

　ここで扱う流体運動は，外力と散逸があるもの(forced dissipative hydrodynamics)とする．とい

[1] この加熱および回転は外力 forcing と呼ばれる．また，エネルギーが保存されないとき散逸があるという.

うのは，従来の研究では近似的にエネルギー保存が成り立つとしたり，外力を無視して(線形の)方程式を立てそれを解くという手法が用いられてきたが，それは現実の流体運動に適合するとは限らないからである．ちなみにそのような系では，一定の外力を受ける系は一定のレスポンス,周期的な外力を受ける系は周期的レスポンスを返し，もし解が非周期的になるとすれば外力が非周期的であるときのみである．

2　Phase Space[2]

M 個の変数 Xi (i=1,2,…,M)の時間変化が次の式で表されるとする：

$$dXi/dt = Fi(X_1, X_2, \ldots, X_M) \qquad (1)$$

ここに Fi は一次導関数をもつ函数である[3].

このような系の解の振る舞いを調べるには，ポアンカレ Poincaré の創案による相空間 phase space という考え方が極めて有効である．これは，各時刻 t における X_i の値が求まったとき，座標空間Γで$(X_1, X_2, \ldots, X_M)$という点に「粒子」を置き，その「粒子」が座標空間内でどのような軌跡 trajectory を描くかを調べる手法である．

さて，散逸も外力もない「保存」系を考えよう．この時，たとえば系の総エネルギーの指標となる何らかの値が変数 Q(=一定)で表されるとする．このとき，この系を表す方程式系(1)の，位相空間における軌跡は Q=const という制約条件のもとで動くものとなる[4]．さて，同様の系で今度は，外力と散逸が両方ある場合を考えよう．この場合は Q があるしきい値 Qc を超えると散逸が大きくなり, ($-dQ/dt$)がある正の値以上に下がらなくなるので，Q の値は少なくとも Qc まで小さくなり，軌跡も先ほどの保存系で Q=Qc という時の状態まで「小さい」範囲にトラップされるようになる．この状態で，また外力を受けて dQ/dt が大きくなり，軌跡が Q=Qc の「限界円」を飛び出すようになるかもしれない．

3　The instability of nonperiodic flow

力学系は小さな変化に対して安定であるかどうか議論する．この章では特に，非周期的解が小さな変動に対して不安定であることを主に論じる．

位相空間Γにおける軌跡にはいろいろなタイプのものがあるが，それらを分類すると，central なものと non-central なものに分けられる．前者は，ある限界の範囲以外に飛び出してゆかないもの，後者はそうでないものである．

軌跡 P が t=t0 において「安定である」とは，他の軌跡 P’が「t=t0 における P の点」（これを P(t0)と書く）に十分近い点を通っている場合，その P’は t→∞のとき P に十分近い状態を保っているということであると定義する．また，本論文で対象とするような力学系に関しては，ある軌跡がある点において安定である場合，軌跡全体が安定であるとなる．

さて，力学系が周期的解をもつとき，その解の軌跡は同じ点[5]を何回でも通る. そうでないときは同じ点を決して通らない．

さて，上記の事柄をまとめるとどうなるか？詳細は略するが，central で安定な軌跡は必

[2] 2,3,4 章は，原文では数学の教科書のように一般的な事柄をずらずら書いているが, 必要なもののみ記すにとどめる

[3] このような系は力学系 dynamical system と呼ばれるが, 必ずしも力学の問題を解くときのみに使われるのではない.

[4] t→∞のとき不動点に落ち着いてしまうか，周期的にグルグルと同じ所を回る場合が多い．後者のとき，Q の値をいろいろ変えると軌跡の群は同心円状になる．

[5] 準周期的解の時は「限りなく近い点」となるが，議論が複雑になるので省略

ず周期的・準周期的となる．その対偶を取ると，非周期的な軌跡はすべて不安定である．つまりどんなに近い「点」を通る軌跡の組も，$t\to\infty$ の時には全く別々の振る舞いをしてしまう．これが非周期的解のもつ重要な性質である．

4　Numerical integration of nonconservative systems

（ここは単に数値解法のテクニックを述べているに過ぎないので省略．ただし 1960 年代当時はこういうことをきちんと書くことが非常に意味のあることだったのだろうと推測する．）

5　The convection equations of Saltzman

Saltzman(1962)は振幅が一定である対流についてその理論式を検討した．その式の背景を簡略に述べる．

対流が x-z 平面でのみ起こっているとする．このとき，支配方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = \frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,z)} + \nu\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = -\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,z)} + \frac{\Delta T}{H}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta \qquad (17,18)$$

となる．ここにΨ：流れ函数，θ：温度の初期値(対流がない状態)からの偏差，g, α, ν, κはそれぞれ重力加速度，熱膨張係数，流体の動粘性係数，熱伝導率である[6]．

Rayleigh は，現在 Raileigh 数と呼ばれている定数

$R_\alpha = g\alpha H^3\Delta T\nu^{-1}\kappa^{-1}$

がある限界値

$R_c = \pi a^{-2}(1+a^2)^3$

を超えないとき，

$$\psi = \psi_0\sin(\pi\alpha H^{-1}x)\sin(\pi H^{-1}z)$$
$$\theta = \theta_0\cos(\pi\alpha H^{-1}x)\sin(\pi H^{-1}z)$$

(19,20 式)

という流体運動が起きることを見出した．

Saltzman(1962)は，ψとθを x と z に関して二重フーリエ展開して，ψとθを t のみの函数としてあらわし，それらの関係を複数の常微分方程式の組として表現することに成功した．また，その数値解法を試みた結果，三つの変数以外の変数は 0 に落ち着いてしまうことを見出した．その三つを X,Y,Z とすると，それらのは

$$a(1+a^2)^{-1}\kappa^{-1}\psi = X\sqrt{2}\cdot\sin(\pi\alpha H^{-1}x)\sin(\pi H^{-1}z)$$
$$\pi R_c^{-1}R_\alpha\Delta T^{-1}\theta = Y\sqrt{2}\cdot\cos(\pi\alpha H^{-1}x)\sin(\pi H^{-1}z) - Z\sin(2\pi H^{-1}z)$$

(23,24 式)

で表される．23,24 式を 17,18 式に代入し，整理すると次の常微分方程式系を得る：

$$dX/dt = -\sigma X + \sigma Y$$
$$dY/dt = -XZ + rX - Y$$
$$dZ/dt = XY - bZ$$

(25,26,27 式)ここで，

$\sigma = \kappa^{-1}\nu$：プラントル数

$r = R_c^{-1}R_\alpha$

$b = (1+a^2)^{-1}$

である．

6　Application of Linear Theory

（上記の微分方程式系に対して，旧来の線形理論を適用し，不動点の存在などを探っているが，ここではあまり関係ないので省略）

[6] また，$\dfrac{\partial(a,b)}{\partial(x,z)} = \dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial z} - \dfrac{\partial b}{\partial x}\dfrac{\partial a}{\partial z}$ である．

7　Numerical integration of the convection equations

25,26,27 式を数値的に解いた. まずはσ=10, b=8/3(つまり a^2＝1/2)とした. r の値は解の安定性に強く影響し（6 章），470/19(　27.14)を超えると解が非周期的になる. ここでは r=28 とした. 結果を TABLE1 と Fig.1,2 に示す.

t=0～1600 付近までは周期的な解が見えるが，その後突然解の挙動は一見ランダムに見えるようになる.

X,Y,Z 空間における軌跡のあつまりを描いたものが Fig.3 である. これらの軌跡は決して交わることがなく，図の上半分では確かに二つの面に完全に分かれているが，図の下半分では一見一つの平面に押し込められているように見える. しかし細部ではこの面は二つの面に分かれている[7].

それではこれらの解は全くランダムなのだろうか. そうではない. 図４は，Z の値がピークをとるごとにその値を M_i とし，点（M_i,M_{i+1}）をプロットしたものである. これにより，Mi の値は非常に明確な規則性を持って変化することが分かる. この Fig.5 の写像で表されるもので近似される[8].

（この後すこし詳しく，これらの系の予測可能性を論じているが省略. ようするに初期値のほんの少しのズレが t →∞になったときに大きく響いてくることを述べている）

8　Conclusion

強制と散逸のある力学系について，その支配方程式を簡略化した微分方程式系を数値的に解いた. それらの解のうちほとんどは非周期的であり，小さな変動に対して不安定であった.

さて，この知見を大気科学の視点からみるとどうなるだろうか. 常に「非周期的な流れ」を繰り返している大気の流れが，もしここで述べたような力学系で表されるとすると，その超長期にわたる予報は極めて困難といわざるを得ない. つまり，現在の大気の状態（つまり初期値）をいかに現実に近く求めても，それはどうしても本当の現実とは乖離があり，そして，その結果大気の未来の状態は現在の観測初期値と元にした計算とは離れていってしまう運命なのだ.

ここで，「超長期」とは一体どれくらいの時間なのか考えてみる必要がある. 現在のところはまだそれに対する応えは筆者は持っていない. それは「数世紀」かもしれないし「数日」かもしれない.

---

[7] この分割は，図の上半分の一つ一つの面が実は二つの面に分割されて, そうなると今度は下半分が 4 つの面に…という自己相似性を持っていることになる. しかしここではあまり突っ込まない.

[8] この写像がカオス研究の第一歩となったのだが，それはもう少し後の時代になってからである.